Нелинейные граничные задачи, вып.13, 2003, с.63-77.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ АНИЗОТРОПНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С L^1–ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

© Ю.С. Горбань

Донецк, Украина

Abstract. In present paper the existence of solutions of some degenerate anisotropic variational inequalities with L^1– right-hand sides is proved.

Введение

В последнее время проведены интересные исследования о разрешимости нелинейных дивергентных уравнений с L^1-данными, не укладывающимися в обычную схему теории монотонных операторов [8]. Среди этих исследований одной из самых значительных явилась работа [1]. В ней была построена теория существования и единственности энтропийных решений задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с правыми частями, принадлежащими классу L^1.

В работах [4] – [6] происходит дальнейшее развитие упомянутой теории на случай уравнений высших порядков. А именно, в них изучаются вопросы существования и единственности энтропийных решений задачи Дирихле для некоторых классов нелинейных эллиптических уравнений высшего порядка с L^1-правыми частями. Аналогичные вопросы для некоторого класса нелинейных вырождающихся анизотропных уравнений четвертого порядка исследованы в [7].

Изучению разрешимости задачи Дирихле для анизотропных уравнений второго порядка с L^1-данными посвящена работа [2]. Авторы доказывают существование слабого решения такой задачи в соответствующих соболевских пространствах.

Одним из актуальных современных направлений в L^1 - теории нелинейных эллиптических уравнений второго порядка является исследование задач, связанных с вариационными неравенствами. Например, в работе [3] изучается односторонняя задача с препятствием, соответствующая дифференциальным монотонным операторам второго порядка, с L^1-правыми частями, причем рассматривается изотропный случай без весовых функций.

В настоящей работе доказывается существование решений некоторых вариационных неравенств с L^1 - правыми частями, причем рассматривается вырождающийся анизотропный случай. Заметим, что в основе доказательства лежит подход, предложенный в [1], а также используются некоторые методы и результаты работы [5].

1. Формулировка результата

Предположим, что Ω – некоторое открытое, ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Пусть при любом $i = 1, ..., n$ заданы действительные числа q_i такие, что $1 < q_i < n$.

Будем использовать такие обозначения:

$$q = \{q_1, ..., q_n\}, \quad q_- = \min_i \{q_i\}, \quad q_+ = \max_i \{q_i\}.$$

Пусть, далее, для любого $i \in \{1, ..., n\}$ $\nu_i : \Omega \to \mathbb{R}$ – положительная функция, причем $\nu_i \in L^1(\Omega)$, $(1/\nu_i)^{1/(q_i-1)} \in L^1(\Omega)$. Положим $\nu = \{\nu_1, ..., \nu_n\}$.

Через $W^{1,q}(\nu,\Omega)$ обозначим множество всех функций из $L^{q_-}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные первого порядка со свойством

$$\nu_i|\,D_i u\,|^{q_i} \in L^1(\Omega), i \in \{1,...,n\}.$$

Множество $W^{1,q}(\nu,\Omega)$ есть рефлексивное банахово пространство с нормой

$$\|\,u\,\|_{W^{1,q}(\nu,\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |\,u\,|^{q_-} dx\right)^{1/q_-} + \sum_{i=1}^n \left(\int\limits_\Omega \nu_i|\,D_i u\,|^{q_i} dx\right)^{1/q_i}.$$

Через $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ обозначим замыкание в $W^{1,q}(\nu,\Omega)$ множества $C_0^\infty(\Omega)$.

Будем использовать следующий результат о вложении для случая весовых анизотропных пространств.

Теорема 1.1. *Пусть для любого $i \in \{1,...,n\}$ существует $m_i \geq 1/(q_i-1)$ такое, что $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$. Тогда существует постоянная C_*, зависящая только от величин $n, q_i, m_i, \|\,1/\nu_i\,\|_{L^{m_i}(\Omega)}, i=1,...,n$, такая, что для любой $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ имеет место неравенство:*

$$\|\,u\,\|_{L^{q_*}(\Omega)} \leq C_* \prod_{i=1}^n \left(\int\limits_\Omega \nu_i|\,D_i u\,|^{q_i} dx\right)^{1/nq_i},$$

где

$$q_* = n\left\{\sum_{i=1}^n \frac{1+m_i}{m_i q_i} - 1\right\}^{-1}.$$

Доказательство этой теоремы основано на применении одного результата о вложении для случая невесовых анизотропных пространств (см. [9]).

Пусть C_1, $C_2 > 0$, g_1, g_2 – неотрицательные функции на Ω, g_1, $g_2 \in L^1(\Omega)$, и пусть $a_i : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1,...,n$ – функции Каратеодори.

Будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^n \Big[\nu_i(x)\Big]^{-1/(q_i-1)} |\,a_i(x,\xi)\,|^{q_i/(q_i-1)} \leq C_1 \sum_{i=1}^n \nu_i(x)|\,\xi_i\,|^{q_i} + g_1(x), \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x,\xi)\xi_i \geq C_2 \sum_{i=1}^n \nu_i(x)|\,\xi_i\,|^{q_i} - g_2(x). \tag{1.2}$$

Кроме того, будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \eta$, имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^n \Big(a_i(x,\xi) - a_i(x,\eta)\Big)\Big(\xi_i - \eta_i\Big) > 0. \tag{1.3}$$

Определим для любого $k > 0$ функцию $T_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, полагая

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & |\,s\,| \leq k, \\ k\,\mathrm{sign}(s), & |\,s\,| > k. \end{cases}$$

Пусть V – выпуклое замкнутое множество в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, удовлетворяющее условиям:

1) $0 \in V$;

2) если $u, w \in V$ и $k \geq 1$, то $u - T_k(u-w) \in V$.

Пусть

$$f \in L^1(\Omega). \tag{1.4}$$

Положим

$$Q_1 = \min\left\{n - \frac{n-1}{q_-}; \quad \frac{n+q_+-1}{q_+}\right\},$$

$$Q_2 = \min\left\{(q_- - 1)n + 1 - q_- \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i}; \quad \frac{n}{q_+ - 1} + 1 - \frac{q_+}{q_+ - 1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i}\right\}.$$

Пусть

$$\hat{q} = q_* \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i}\right),$$

и для любого $i \in \{1, ..., n\}$ положим

$$\widehat{q}_i = \frac{q_i \hat{q}}{1 + \hat{q}}.$$

Теорема 1.2. *Пусть справедливы предположения* (1.1) – (1.4) *и выполнены условия:*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} < Q_1; \tag{1.5}$$

для любого $i \in \{1, ..., n\}$ существует $m_i > 0$ такое, что $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$,

$$\frac{1}{m_i}\left(n - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{q_j}\right) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j q_j} < 1 + (q_i - 1)n - q_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{q_j}, \tag{1.6}$$

причем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i q_i} < Q_2; \tag{1.7}$$

для любого $i \in \{1, ..., n\}$ существует $t_i > 0$ такое, что $\nu_i \in L^{t_i}(\Omega)$,

$$\frac{1}{t_i} < 1 - (q_i - 1)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1 + m_j}{m_j q_j} - 1\right)\left(n - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{q_j}\right)^{-1}. \tag{1.8}$$

Тогда существует функция $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ такая, что:

1) *для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $T_k(u) \in V$;*

2) *для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено $T_k(u - \varphi) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$;*

3) *для любого $\lambda \in (1, \hat{q})$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$;*

4) *для любого $i \in \{1, ..., n\}$ и любого $\mu \in (1, \widehat{q}_i)$ имеем $\nu_i^{1/q_i} D_i u \in L^\mu(\Omega)$;*

5) *для любого $i \in \{1, ..., n\}$ имеем $a_i(x, Du) \in L^1(\Omega)$;*

6) *для любых $i \in \{1, ..., n\}$ и $p \in (0, \frac{\widehat{q}_i}{q_i - 1})$ имеем $\nu_i^{-1/q_i} a_i(x, Du) \in L^p(\Omega)$;*

7) *для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \cap V$ справедливо неравенство*

$$\int_\Omega \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du) D_i T_k(u - \varphi)\right\} dx \le \int_\Omega f T_k(u - \varphi) dx. \tag{1.9}$$

Заметим, что в изотропном случае (при $q_+ = q_- = q$) условие (1.5) принимает вид $q > 2 - (1/n)$. В анизотропном случае из ограничения (1.5) с необходимостью получаем $q_+ > 2 - (1/n)$ и $q_- > 1 + (n-1)/(n^2+n-1)$, причем из последнего неравенства следует, что числа q_i, $i = 1, ..., n$, не могут быть сколь угодно близкими к единице.

Далее через C_i, $i = 3, 4, ...$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от величин n, C_1, C_2, q_i, m_i, t_i, $\| g_1 \|_{L^1(\Omega)}$, $\| g_2 \|_{L^1(\Omega)}$, $\| f \|_{L^1(\Omega)}$, $\| \nu_i \|_{L^{t_i}(\Omega)}$, $\| 1/\nu_i \|_{L^{m_i}(\Omega)}$, $i = 1, ..., n$,и meas Ω.

2. Доказательство теоремы 1.2

Всюду в дальнейшем будем считать, что все предположения теоремы 1.2 выполнены.

2.1. Некоторые результаты для аппроксимирующих задач.

Пусть $\{f_l\} \in C_0^\infty(\Omega)$, $l \in \mathbb{N}$, – последовательность функций, сильно сходящаяся к f в $L^1(\Omega)$, причем

$$\| f_l \|_{L^1(\Omega)} \leq \| f \|_{L^1(\Omega)},\ l \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Из (1.1) – (1.3) и результатов [8] о разрешимости вариационных неравенств с монотонными операторами получаем: если $l \in \mathbb{N}$, то существует функция $u_l \in V$ такая, что для любой $\varphi \in V$ выполнено неравенство

$$\int\limits_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, Du_l) D_i(u_l - \varphi) \right\} dx \leq \int\limits_\Omega f_l (u_l - \varphi) dx. \tag{2.2}$$

Пусть $l \in \mathbb{N}$. Зафиксируем произвольное число $k \geq 1$. Из условий 1) и 2) в определении множества V следует, что $u_l - T_k(u_l) \in V$. Выбирая в (2.2) в качестве пробной функции $u_l - T_k(u_l)$ и учитывая (2.1) и (1.2), получаем:

$$\int\limits_{\{| u_l | \leq k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i | D_i u_l |^{q_i} \right\} dx \leq C_3 k. \tag{2.3}$$

Лемма 2.1. *Для любых $l \in \mathbb{N}$ при каждом $k \geq 1$ имеем*

$$\mathrm{meas}\{| u_l | \geq k\} \leq C_4 k^{-\hat{q}}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Выберем произвольные $l \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Поскольку $| T_k(u_l) | = k$ на множестве $\{| u_l | \geq k\}$, то

$$k^{q_*} \mathrm{meas}\{| u_l | \geq k\} \leq \int\limits_\Omega | T_k(u_l) |^{q_*} dx. \tag{2.5}$$

Из условия (1.6) вытекает, что для любого $i \in \{1, ..., n\}$ имеем $m_i > 1/(q_i - 1)$, а из того факта, что $u_l \in V \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, следует, что $T_k(u_l) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда, применяя для оценки правой части (2.5) теорему 1.1 к функции $T_k(u_l)$, получим

$$k^{q_*} \mathrm{meas}\{| u_l | \geq k\} \leq C_*{}^{q_*} \left\{ \prod_{i=1}^n \Big(\int\limits_{\{| u_l | < k\}} \nu_i \, | D_i u_l |^{q_i} dx \Big)^{1/nq_i} \right\}^{q_*}.$$

В силу (2.3) из последнего неравенства будем иметь

$$k^{q_*}\text{meas}\{|\, u_l\,| \geq k\} \leq C_4 k^{(q_*/n)\sum\limits_{i=1}^{n} 1/q_i},$$

откуда следует (2.4). Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Для любых $l \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, ..., n\}$ при каждом $k \geq 1$*

$$\text{meas}\Big\{{\nu_i}^{1/q_i}|\, D_i u_l\,| \geq k\Big\} \leq C_5 k^{-\widehat{q_i}}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные $k \geq 1$, $k_1 \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, ..., n\}$. Положим $B = \Big\{{\nu_i}^{1/q_i}|\, D_i u_l\,| \geq k, |\, u_l\,| < k_1\Big\}$. Используя (2.3), получаем

$$\text{meas}\, B \leq C_3 k_1 k^{-q_i}. \tag{2.7}$$

Поскольку

$$\text{meas}\Big\{{\nu_i}^{1/q_i}|\, D_i u_l\,| \geq k\Big\} \leq \text{meas}\{|\, u_l\,| \geq k_1\} + \text{meas}\, B, \tag{2.8}$$

то отсюда, с учетом (2.4) и (2.7), выводим соотношение

$$\text{meas}\Big\{{\nu_i}^{1/q_i}|\, D_i u_l\,| \geq k\Big\} \leq C_4 {k_1}^{-\hat{q}} + C_3 k_1 k^{-q_i}. \tag{2.9}$$

Полагая в (2.9) $k_1 = k^{q_i/(\hat{q}+1)}$, устанавливаем (2.6). Лемма доказана.

Для любых $t > 0$, $l, j \in \mathbb{N}$ введем следующие обозначения:

$$M_t(l, j) = \text{meas}\{|\, u_l - u_j\,| \geq t\}, \tag{2.10}$$

$$N_t(l, j) = \text{meas}\Bigg\{\sum_{i=1}^{n} {\nu_i}^{1/q_i}|\, D_i u_l - D_i u_j\,| \geq t\Bigg\}. \tag{2.11}$$

Лемма 2.3. *Для любых $t > 0$, $k \geq 1$, $l, j \in \mathbb{N}$ имеет место оценка:*

$$M_t(l, j) \leq 2C_4 k^{-\hat{q}} + t^{-q_-}\int\limits_{\Omega} |\, T_k(u_l) - T_k(u_j)\,|^{q_-}\, dx. \tag{2.12}$$

Доказательство. Пусть $t > 0$, $k \geq 1$, $l, j \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$\{|\, u_l - u_j\,| \geq t\} \subset \{|\, u_l\,| \geq k\} \cup \{|\, u_j\,| \geq k\} \cup \{|\, T_k(u_l) - T_k(u_j)\,| \geq t\},$$

то

$$M_t(l, j) \leq \text{meas}\{|\, u_l\,| \geq k\} + \text{meas}\{|\, u_j\,| \geq k\} + \text{meas}\{|\, T_k(u_l) - T_k(u_j)\,| \geq t\}. \tag{2.13}$$

Пусть $A = \{|\, T_k(u_l) - T_k(u_j)\,| \geq t\}$. Тогда $|\, T_k(u_l) - T_k(u_j)\,|^{q_-} \geq t^{q_-}$ на A. Следовательно,

$$\text{meas}\, A \leq t^{-q_-}\int\limits_{\Omega} |\, T_k(u_l) - T_k(u_j)\,|^{q_-}\, dx. \tag{2.14}$$

Оценивая в (2.13) первые два слагаемых с помощью (2.4), а оставшееся – с помощью (2.14), получаем (2.12). Лемма доказана.

Введем следующее обозначение:

$$\hat{q_-} = \frac{\hat{q} q_-}{1 + \hat{q}}.$$

Кроме того, для любых $k \geq 1$, $t > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m > t$, $l, j \in \mathbb{N}$ положим

$$E_{t,m,k}(l,j) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} {\nu_i}^{1/q_i} |\, D_i u_l - D_i u_j \,| \geq t, \right.$$

$$\left. |\, u_l - u_j \,| \leq \frac{1}{k},\ \sum_{i=1}^{n} {\nu_i}^{1/q_i} |\, D_i u_l \,| \leq m,\ \sum_{i=1}^{n} {\nu_i}^{1/q_i} |\, D_i u_j \,| \leq m \right\}. \tag{2.15}$$

Лемма 2.4. *Пусть $k \geq 1$, $t > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m > t$, $l, j \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$N_t(l,j) \leq 2C_6 m^{-\hat{q_-}} + M_{1/k}(l,j) + \text{meas } E_{t,m,k}(l,j). \tag{2.16}$$

Доказательство. Поскольку

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} {\nu_i}^{1/q_i} |\, D_i u_l - D_i u_j \,| \geq t \right\} \subset \left\{ |\, u_l - u_j \,| > \frac{1}{k} \right\} \bigcup E_{t,m,k}(l,j) \bigcup$$

$$\bigcup \left\{ \sum_{i=1}^{n} {\nu_i}^{1/q_i} |\, D_i u_l \,| \, > \, m \right\} \bigcup \left\{ \sum_{i=1}^{n} {\nu_i}^{1/q_i} |\, D_i u_j \,| \, > \, m \right\},$$

то с учетом обозначений (2.10) и (2.11) будем иметь:

$$N_t(l,j) \leq M_{1/k}(l,j) + \text{meas } E_{t,m,k}(l,j) +$$

$$+\text{meas}\left\{ \sum_{i=1}^{n} {\nu_i}^{1/q_i} |\, D_i u_l \,| \, > \, m \right\} + \text{meas}\left\{ \sum_{i=1}^{n} {\nu_i}^{1/q_i} |\, D_i u_j \,| \, > \, m \right\}. \tag{2.17}$$

Из леммы 2.2 следует, что для любого $l \in \mathbb{N}$

$$\text{meas}\left\{ \sum_{i=1}^{n} {\nu_i}^{1/q_i} |\, D_i u_l \,| > m \right\} \leq C_6 m^{-\hat{q_-}}. \tag{2.18}$$

Аналогичную оценку имеем для функции u_j. Тогда из (2.17), с учетом (2.18), вытекает (2.16). Лемма доказана.

Определим для произвольной точки $x \in \Omega$ функцию $\Phi_x : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\Phi_x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \Big(a_i(x, \xi) - a_i(x, \eta) \Big)(\xi_i - \eta_i). \tag{2.19}$$

Поскольку $a_i, i = 1, ..., n,$ – функции Каратеодори и для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \xi \neq \eta$, имеет место неравенство (1.3), то существует множество $H \subset \Omega$ меры нуль такое,что:

а) для любого $x \in \Omega \setminus H$ функция Φ_x непрерывна на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$;

б) для любых $x \in \Omega \setminus H$ и $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \eta$, справедливо неравенство $\Phi_x(\xi, \eta) > 0$.

Для любых $t > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m > t$, $x \in \Omega$ положим

$$G_{t,m}(x) = \left\{ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} {\nu_i}^{1/q_i}(x) |\, \xi_i - \eta_i \,| \geq t, \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^{n} {\nu_i}^{1/q_i}(x) |\, \xi_i \,| \leq m, \sum_{i=1}^{n} {\nu_i}^{1/q_i}(x) |\, \eta_i \,| \leq m \right\}. \tag{2.20}$$

Пусть $t > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m > t$. Определим функцию $\mu_{t,m} : \Omega \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\mu_{t,m}(x) = \begin{cases} \min\limits_{G_{t,m}(x)} \Phi_x, & x \in \Omega \setminus H, \\ 0, & x \in H. \end{cases} \tag{2.21}$$

Из определения (2.21), свойств а), б) функции Φ_x и условия (1.1) следует, что для всех $t > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m > t$ имеем: $\mu_{t,m} \geq 0$ на Ω, $\mu_{t,m} > 0$ п.в. на Ω, $\mu_{t,m} \in L^1(\Omega)$.

Поскольку при любом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ последовательность $\{T_k(u_l)\}$, $l \in \mathbb{N}$, ограничена в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ (см. (2.3)), то из рефлексивности $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ вытекает, что существует возрастающая последовательность $\{l_j\} \subset \mathbb{N}$ и последовательность $\{h_k\} \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ такие, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$T_k(u_{l_j}) \to h_k \text{ слабо в } \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega), \quad j \to \infty. \tag{2.22}$$

Отсюда следует сильная сходимость $T_k(u_{l_j})$ к h_k в $L^{q-}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, а следовательно, и фундаментальность последовательности $\{T_k(u_{l_j})\}$ в $L^{q-}(\Omega)$ при любом $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 2.5. *Последовательность $\{u_{l_j}\}$ фундаментальна по мере.*

Доказательство. Пусть $t > 0$, $\varepsilon > 0$. Выберем $k \in \mathbb{N}$ так, что $2C_4 k^{-\hat{q}} < \varepsilon/2$. Тогда, в силу фундаментальности последовательности $\{T_k(u_{l_j})\}$ в $L^{q-}(\Omega)$, из (2.12) будем иметь:

$$M_t(l_i, l_j) < \varepsilon \quad \text{для всех } i,\ j \geq i_0(k,t).$$

Значит, подпоследовательность $\{u_{l_j}\}$ фундаментальна по мере в Ω. Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Для любого $i \in \{1,...,n\}$ последовательность $\{\nu_i^{1/q_i} D_i u_{l_j}\}$ фундаментальна по мере.*

Доказательство. Зафиксируем $t > 0$ и $\varepsilon > 0$. Выберем произвольное число $m \in \mathbb{N}$, $m > t$ так, чтобы первое слагаемое в правой части (2.16) стало меньше $\varepsilon/3$. Тогда для любых k, l, $j \in \mathbb{N}$ в силу (2.16) будем иметь:

$$N_t(l,j) < \frac{\varepsilon}{3} + M_{1/k}(l,j) + \operatorname{meas} E_{t,m,k}(l,j). \tag{2.23}$$

Из леммы 2.5 следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $n_k \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $i,j \in \mathbb{N}$, $i,j \geq n_k$, выполнено соотношение

$$M_{1/k}(l_i,l_j) \leq \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.24}$$

Положим для любого $k \in \mathbb{N}$

$$b_k = \sup_{i,j \geq n_k} N_t(l_i,l_j),\ d_k = \sup_{i,j \geq n_k} \operatorname{meas} E_{t,m,k}(l_i,l_j). \tag{2.25}$$

Принимая во внимание (2.24) и (2.25), из (2.23) получаем:

$$b_k \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{k} + d_k. \tag{2.26}$$

Можно показать, что $d_k \to 0$ при $k \to \infty$, откуда следует, что для любого $k \geq k_0$ имеем $d_k < \frac{\varepsilon}{3}$.

Тогда из (2.26) с учетом (2.25) вытекает, что для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$

$$\sup_{i,j \geq n_k} N_t(l_i,l_j) = b_k < \varepsilon,$$

откуда

$$N_t(l_i, l_j) < \varepsilon \quad \text{для всех } i, j \geq n_k. \tag{2.27}$$

Из (2.27), с учетом определения $N_t(l, j)$, выводим, что для любого $i \in \{1, ..., n\}$ последовательность ${\nu_i}^{1/q_i} D_i u_{l_j}$, $j \in \mathbb{N}$, фундаментальна по мере. Лемма доказана.

Отметим, что доказательство лемм 2.3 – 2.6 проводится с помощью метода, предложенного в работе [5].

В силу леммы 2.5 существует такая измеримая функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$, что последовательность $\{u_{l_j}\}$ сходится к u по мере, а из леммы 2.6 следует существование таких функций $v_i : \Omega \to \mathbb{R}$, что при каждом фиксированном $i \in \{1, ..., n\}$ последовательность $\{{\nu_i}^{1/q_i} D_i u_{l_j}\}$ сходится к v_i по мере.

Тогда по теореме Ф.Рисса из рассматриваемых последовательностей можно извлечь подпоследовательности, сходящиеся к соответствующим функциям почти всюду в Ω. Без ограничения общности можно считать, что

$$u_{l_j} \to u \quad \text{почти всюду в } \Omega, \tag{2.28}$$

$$\text{при любом } i \in \{1, ..., n\} \quad {\nu_i}^{1/q_i} D_i u_{l_j} \to v_i \quad \text{почти всюду в } \Omega. \tag{2.29}$$

Лемма 2.7. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $T_k(u) \in V$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$. Из утверждений (2.28), (2.22) и непрерывности функции T_k вытекает, что

$$T_k(u) = h_k \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega). \tag{2.30}$$

Обратимся к свойствам множества V, а именно, положим в 2) $u = 0$, $w = u_{l_j}$, а затем воспользуемся нечетностью функции T_k. Тогда

$$T_k(u_{l_j}) \in V, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{2.31}$$

В силу (2.22), (2.30), (2.31) и свойства слабой замкнутости множества V получаем, что $T_k(u) \in V$. Лемма доказана.

Лемма 2.8. *Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $v \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем $T_k(u - v) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольные $k \in \mathbb{N}$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Из (2.28) и непрерывности срезки T_k следует, что

$$T_k(u_{l_j} - \varphi) \to T_k(u - \varphi) \text{ почти всюду в } \Omega. \tag{2.32}$$

Из (2.3) имеем равномерную ограниченность по $j \in \mathbb{N}$ норм функций $T_k(u_{l_j} - \varphi)$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, откуда, в силу рефлексивности $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ вытекает существование некоторой подпоследовательности последовательности $\{T_k(u_{l_j} - \varphi)\}$, сходящейся в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ слабо к функции $w_k \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Без ограничения общности можно считать, что

$$T_k(u_{l_j} - \varphi) \to w_k \text{ слабо в } \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega). \tag{2.33}$$

Из (2.32) и (2.33) следует, что

$$T_k(u - \varphi) = w_k \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega). \tag{2.34}$$

Лемма доказана.

Чтобы сделать вывод об определенной суммируемости предельных функций из (2.28) и (2.29), воспользуемся следующим результатом из [5].

Лемма 2.9. *Пусть g – измеримая функция на Ω, $M > 0, \gamma > 0$, и пусть для любого $k \in \mathbb{N}$*

$$\text{meas}\{|\, g\,| \geq k\} \leq Mk^{-\gamma}. \tag{2.35}$$

Тогда для любого $\lambda \in (0, \gamma)$ имеем $g \in L^\lambda(\Omega)$ и

$$\|\, u\,\|_{L^\lambda(\Omega)} \leq 4^{1/(\gamma-\lambda)}[\text{meas}\;\Omega + 2^\gamma M]^{1/\lambda}. \tag{2.36}$$

Из условия (1.7), учитывая определения чисел q_* и $\hat{q}$, получим:

$$1 < \hat{q}. \tag{2.37}$$

Лемма 2.10. *Для любого $\lambda \in (1, \hat{q})$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $\lambda \in (1, \hat{q})$. Из леммы 2.1 вытекает, что для любых j, $k \in \mathbb{N}$

$$\text{meas}\{|\, u_{l_j}\,| \geq k\} \leq C_4 k^{-\hat{q}}.$$

Отсюда, в силу леммы 2.9 и (2.37), следует, что $u_{l_j} \in L^\lambda(\Omega)$, $j \in \mathbb{N}$, причем выполнена равномерная оценка

$$\|\, u_{l_j}\,\|_{L^\lambda}(\Omega) \leq C', \tag{2.38}$$

где постоянная C' зависит только от известных параметров и λ. Теперь (2.28) и лемма Фату позволяют утверждать, что $u \in L^\lambda(\Omega)$. Лемма доказана.

Далее, в силу условия (1.7), с учетом определений q_* и $\hat{q}$, получим, что для любого $i \in \{1, ..., n\}$ имеем $\hat{q} > 1/(q_i - 1)$, откуда

$$1 < \widehat{q}_i, \quad i \in \{1, ..., n\}. \tag{2.39}$$

Лемма 2.11. *Пусть $i \in \{1, ..., n\}$. Тогда для любого $\mu \in (1, \widehat{q}_i)$ имеем $v_i \in L^\mu(\Omega)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\mu \in (1, \widehat{q}_i)$. В силу леммы 2.2 для любых k, $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$\text{meas}\{{\nu_i}^{1/q_i}|\, D_i u_{l_j}\,| \geq k\} \leq C_5 k^{-\widehat{q}_i}.$$

Тогда лемма 2.9 и (2.39) позволяют сделать вывод о том, что функция ${\nu_i}^{1/q_i} D_i u_{l_j}$ при любом $j \in \mathbb{N}$ суммируема с показателем μ и выполняется следующая равномерная по $j \in \mathbb{N}$ оценка:

$$\|\, {\nu_i}^{1/q_i} D_i u_{l_j}\,\|_{L^\mu(\Omega)} \leq C'', \tag{2.40}$$

где постоянная C'' зависит только от известных параметров и μ. В силу (2.29) и леммы Фату имеем $v_i \in L^\mu(\Omega)$. Лемма доказана.

Положим

$$w_i = (1/\nu_i)^{1/q_i} v_i. \tag{2.41}$$

Лемма 2.12. *$w_i \in L^1(\Omega)$ при любом $i \in \{1, ..., n\}$.*

Доказательство. Из условия (1.6), принимая во внимание определения чисел q_*, $\hat{q}$ и $\widehat{q}_i$, имеем

$$\frac{m_i q_i}{m_i q_i - 1} < \widehat{q}_i. \tag{2.42}$$

Используя неравенство Юнга и учитывая определение (2.41), получаем

$$|\,w_i\,| \leq \Big(1/\nu_i\Big)^{m_i} + |\,v_i\,|^{m_i q_i/(m_i q_i - 1)}. \tag{2.43}$$

Поскольку $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$, а вследствие (2.42) и леммы 2.11 имеем $v_i \in L^{\mu}(\Omega)$, где $\mu = m_i q_i/(m_i q_i - 1)$, то из (2.43) вытекает, что $w_i \in L^1(\Omega)$. Лемма доказана.

Лемма 2.13. *Для любого $i \in \{1,...,n\}$ функция u имеет обобщенную производную $D_i u$, причем $D_i u = w_i$ почти всюду на Ω.*

Доказательство. Зафиксируем любое $i \in \{1,...,n\}$. Возьмем произвольную функцию $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Имеем

$$\int\limits_\Omega u D_i \psi dx = \int\limits_\Omega (u - u_{l_j}) D_i \psi dx - \int\limits_\Omega (D_i u_{l_j} - w_i)\psi dx - \int\limits_\Omega w_i \psi dx. \tag{2.44}$$

В силу (2.28), оценки (2.38), теоремы Егорова и леммы 2.10 получаем

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_\Omega (u - u_{l_j}) D_i \psi\, dx = 0. \tag{2.45}$$

Из (2.29), (2.41), теоремы Егорова, леммы 2.12 и оценки (2.40) с $\mu = m_i q_i/(m_i q_i - 1)$, которое в силу (2.42) является допустимым, делаем вывод, что

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_\Omega (D_i u_{l_j} - w_i)\psi\, dx = 0. \tag{2.46}$$

Учитывая (2.45) и (2.46) и переходя в (2.44) к пределу при $j \to \infty$, получаем

$$\int\limits_\Omega u D_i \psi\, dx = -\int\limits_\Omega w_i \psi\, dx \quad \text{для любой } \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Значит, существует $D_i u$, причем $D_i u = w_i$ почти всюду на Ω. В силу леммы 2.12 имеем $D_i u \in L^1(\Omega)$. Лемма доказана.

Из лемм 2.10 и 2.13 получаем $u \in W^{1,1}(\Omega)$.

При сделанных предположениях на q_i, ν_i, $i \in \{1,...,n\}$, имеем $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$, в силу чего из леммы 2.7 вытекает, что при любом $k \in \mathbb{N}$

$$T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega). \tag{2.47}$$

Нетрудно показать, что $T_k(u)$ сильно сходится к u в $W^{1,1}(\Omega)$ при $k \to \infty$, откуда, вследствие (2.47), выводим, что $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$.

Поскольку из (2.29), (2.41) и леммы 2.13 следует, что при любом $i \in \{1,...,n\}$ $D_i u_{l_j} \to D_i u$ почти всюду на Ω, то

$$a_i(x, Du_{l_j}) \to a_i(x, Du) \quad \text{почти всюду на } \Omega. \tag{2.48}$$

Лемма 2.14. *Пусть $i \in \{1,...,n\}$. Тогда для любого p такого, что*

$$0 < p < \frac{\widehat{q}_i}{q_i - 1}, \tag{2.49}$$

имеем $\{\nu_i{}^{-1/q_i} a_i(x, Du_{l_j})\} \subset L^p(\Omega)$ и выполнена равномерная по $j \in \mathbb{N}$ оценка

$$\|\,\nu_i{}^{-1/q_i} a_i(x, Du_{l_j})\,\|_{L^p(\Omega)} \leq \widehat{C}, \tag{2.50}$$

где постоянная $\widehat{C}$ зависит только от известных параметров и C''.

Доказательство. Зафиксируем произвольное p, удовлетворяющее (2.49). В силу условия роста (1.1) имеем

$$\left[\nu_i^{-1/q_i} |\, a_i(x, Du_{l_j})\,|\right]^p \leq C_7 \sum_{k=1}^{n} \left(\nu_k^{1/q_k} |\, D_k u_{l_j}\,|\right)^{q_k \frac{q_i-1}{q_i} p} + C_8 g_1^{\frac{q_i-1}{q_i} p}. \tag{2.51}$$

Пусть $k \in \{1, ..., n\}$. Из лемм 2.2 и 2.9 следует, что достаточным для суммируемости функции $\nu_k^{1/q_k} D_k u_{l_j}$ является условие $0 < q_k \frac{q_i-1}{q_i} p < \hat{q}_k$, которое выполнено в силу соотношения (2.49). Суммируемость функции $g_1^{\frac{q_i-1}{q_i} p}$ очевидна вследствие (2.49) и того факта, что $g_1 \in L^1(\Omega)$. Из (2.51) с учетом последних рассуждений вытекает, что

$$\nu_i^{-1/q_i} a_i(x, Du_{l_j}) \in L^p(\Omega),$$

причем в силу (2.40) выполнена равномерная по $j \in \mathbb{N}$ оценка (2.50). Лемма доказана.

Лемма 2.15. *Для любого* $i \in \{1, ..., n\}$ *имеем* $a_i(x, Du) \in L^1(\Omega)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $i \in \{1, ..., n\}$. Из (1.5), (1.7) и (1.8), с учетом определений чисел q_*, $\hat{q}$ и $\widehat{q}_i$, следует, что

$$1 < \frac{t_i q_i}{t_i q_i - 1} < \frac{\widehat{q}_i}{q_i - 1}. \tag{2.52}$$

Полагая, в силу (2.49) и (2.52), $p = \frac{t_i q_i}{t_i q_i - 1}$ и используя неравенство Гельдера, получим

$$\int_\Omega |\, a_i(x, Du_{l_j})\,| dx \leq \left(\int_\Omega \nu_i^{t_i} dx\right)^{1/t_i} \left(\int_\Omega \left(\nu_i^{-1/q_i} |\, a_i(x, Du_{l_j})\,|\right)^{t_i q_i/(t_i q_i - 1)} dx\right)^{(t_i q_i - 1)/t_i q_i},$$

откуда, с учетом условия $\nu_i \in L^{t_i}(\Omega)$ и леммы 2.14, можно сделать вывод о том, что

$$a_i(x, Du_{l_j}) \in L^1(\Omega),\ j \in \mathbb{N}, \tag{2.53}$$

а также имеет место равномерная оценка

$$\|\, a_i(x, Du_{l_j})\,\|_{L^1(\Omega)} \leq C, \tag{2.54}$$

где постоянная C зависит только от известных параметров и $\widehat{C}$. Теперь (2.48) и теорема Фату позволяют утверждать, что $a_i(x, Du) \in L^1(\Omega)$. Лемма доказана.

Лемма 2.16. $a_i(x, Du_{l_j})$ *сильно сходится к* $a_i(x, Du)$ *в* $L^1(\Omega)$ *при любом фиксированном* $i \in \{1, ..., n\}$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из (2.48), (2.53), теоремы Егорова и леммы 2.15.

2.2. Предельный переход.

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \cap V$ – произвольная функция.

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и положим

$$E_0 = \{|\, u - \varphi\,| = k\}, \quad E = \{\,|\, u - \varphi\,| < k\},$$

а также для любого $j \in \mathbb{N}$ положим

$$E_j = \{\,|\, u_{l_j} - \varphi\,| < k\} \setminus E_0, \quad H_j = \{\,|\, u_{l_j} - \varphi\,| < k\} \cap E_0.$$

Можно показать, что имеет место следующий результат.

Лемма 2.17. *Пусть $\Phi \in L^1(\Omega)$. Тогда*
$$\int\limits_{E_j} \Phi\, dx \to \int\limits_{E} \Phi\, dx, \quad j \to \infty.$$

Фиксируя произвольное $j \in \mathbb{N}$ и подставляя в (2.2) в качестве пробной функции $u_{l_j} - T_k(u_{l_j} - \varphi)$, получим неравенство:
$$\int\limits_{\{|u_{l_j}-\varphi|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du_{l_j}) D_i(u_{l_j} - \varphi) \right\} dx \le \int\limits_{\Omega} f_{l_j} T_k(u_{l_j} - \varphi)\, dx. \tag{2.55}$$

С учетом определения множеств E, E_j и H_j левую часть (2.55) запишем в виде
$$\int\limits_{E} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du_{l_j}) D_i(u_{l_j} - \varphi) \right\} dx =$$
$$= \int\limits_{H_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du_{l_j}) D_i(u_{l_j} - \varphi) \right\} dx + \int\limits_{E_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du_{l_j}) D_i(u_{l_j} - \varphi) \right\} dx. \tag{2.56}$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (2.56). Поскольку для $i \in \{1, ..., n\}$ $D_i u = D_i \varphi$ почти всюду на множестве E_0, то
$$\int\limits_{H_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du_{l_j}) D_i(u_{l_j} - \varphi) \right\} dx = \int\limits_{H_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du) D_i(u_{l_j} - u) \right\} dx +$$
$$+ \int\limits_{H_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} [a_i(x, Du_{l_j}) - a_i(x, Du)] D_i(u_{l_j} - u) \right\} dx,$$

откуда, пользуясь условием монотонности (1.3), выводим
$$\int\limits_{H_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du_{l_j}) D_i(u_{l_j} - \varphi) \right\} dx \ge \int\limits_{H_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du) D_i(u_{l_j} - u) \right\} dx. \tag{2.57}$$

Из (2.55) с учетом (2.56) и (2.57) получаем:
$$\int\limits_{H_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du) D_i(u_{l_j} - u) \right\} dx + \int\limits_{E_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du_{l_j}) D_i(u_{l_j} - \varphi) \right\} dx \le$$
$$\le \int\limits_{\Omega} f_{l_j} T_k(u_{l_j} - \varphi)\, dx. \tag{2.58}$$

Из (2.33) и (2.34) следует слабая сходимость $T_k(u_{l_j} - \varphi)$ к $T_k(u - \varphi)$ в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, пользуясь которой нетрудно показать, что
$$\int\limits_{H_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du) D_i(u_{l_j} - u) \right\} dx \to 0, \quad j \to \infty. \tag{2.59}$$

Докажем, что при $j \to \infty$ имеем
$$\int\limits_{E_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du_{l_j}) D_i \varphi \right\} dx \to \int\limits_{E} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du) D_i \varphi \right\} dx. \tag{2.60}$$

Ясно, что

$$\int\limits_{E_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du_{l_j}) D_i\varphi \right\} dx - \int\limits_{E} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du) D_i\varphi \right\} dx =$$

$$= \int\limits_{E_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} [a_i(x, Du_{l_j}) - a_i(x, Du)] D_i\varphi \right\} dx + \tag{2.61}$$

$$+ \int\limits_{E_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du) D_i\varphi \right\} dx - \int\limits_{E} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du) D_i\varphi \right\} dx.$$

В силу выбора φ и леммы 2.15 имеем $\Phi = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x, Du) D_i\,\varphi \in L^1(\Omega)$. Тогда в силу леммы 2.17 будем иметь:

$$\int\limits_{E_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du) D_i\varphi \right\} dx \to \int\limits_{E} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du) D_i\varphi \right\} dx \quad \text{при } j \to \infty. \tag{2.62}$$

Из леммы 2.16 вытекает, что

$$\int\limits_{E_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} [a_i(x, Du_{l_j}) - a_i(x, Du)] D_i\varphi \right\} dx \to 0 \quad \text{при } j \to \infty. \tag{2.63}$$

Тогда из (2.61) с учетом (2.62) и (2.63) выводим, что (2.60) имеет место.

Запишем неравенство (2.58) в следующем виде:

$$\int\limits_{E_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du_{l_j}) D_i u_{l_j} + g_2 \right\} dx \le \int\limits_{E_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du_{l_j}) D_i\varphi \right\} dx +$$

$$\int\limits_{\Omega} f_{l_j} T_k(u_{l_j} - \varphi)\, dx - \int\limits_{H_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du) D_i(u_{l_j} - u) \right\} dx + \int\limits_{E_j} g_2\, dx. \tag{2.64}$$

Здесь

$$\int\limits_{E_j} g_2\, dx \to \int\limits_{E} g_2\, dx, \quad j \to \infty, \tag{2.65}$$

в силу леммы 2.17, а

$$\int\limits_{\Omega} f_{l_j} T_k(u_{l_j} - \varphi)\, dx \to \int\limits_{\Omega} f T_k(u - \varphi)\, dx, \quad j \to \infty, \tag{2.66}$$

в силу сходимости $T_k(u_{l_j} - \varphi)$ к $T_k(u - \varphi)$ почти всюду в Ω, сильной сходимости f_{l_j} к f в $L^1(\Omega)$ и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Пусть $\chi : \Omega \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция множества E, и для любого $j \in \mathbb{N}$ $\chi_j : \Omega \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция множества E_j.

Покажем, что для почти всех $x \in \Omega$

$$\chi(x) \le \varliminf_{j \to \infty} \chi_j(x). \tag{2.67}$$

Если $x \notin E$, то (2.67) очевидно. В силу (2.28) существует множество $\hat{E} \subset \Omega$ такое, что

$$\operatorname{meas} \hat{E} = 0, \quad u_{l_j} \not\to u \text{ на } E. \tag{2.68}$$

Пусть $x \in E \setminus \hat{E}$. В этом случае $\chi(x) = 1$. Из определения множества E

$$|\, u(x) - \varphi(x)\,| < k. \tag{2.69}$$

В силу (2.68) имеет место сходимость последовательности $u_{l_j}(x)$ к $u(x)$ при $j \to \infty$. Значит, существует номер J_0 такой, что для любых $j \geq J_0$

$$|\, u_{l_j}(x) - u(x)\,| < k - |\, u(x) - \varphi(x)\,|, \tag{2.70}$$

где правая часть положительна вследствие (2.69).

В силу (2.69) и (2.70) получаем для любого $j \geq J_0$

$$|\, u_{l_j}(x) - \varphi(x)\,| \leq |\, u_{l_j}(x) - u(x)\,| + |\, u(x) - \varphi(x)\,| <$$

$$< k - |\, u(x) - \varphi(x)\,| + |\, u(x) - \varphi(x)\,| < k,$$

что означает принадлежность точки x любому из множеств E_j при $j \geq J_0$. Следовательно, $x \in \varliminf\limits_{j\to\infty} E_j$, $\varliminf\limits_{j\to\infty} \chi_j(x) = 1$, и (2.67) имеет место.

Неравенство (2.67) может нарушаться только в точках множества $E \cap \hat{E}$, которое, в силу (2.68), имеет нулевую меру. Итак, (2.67) справедливо для почти всех $x \in \Omega$.

Лемма Фату, с учетом условия коэрцитивности (1.2), а также сходимости последовательности Du_{l_j} к Du, $j \to \infty$, почти всюду в Ω, и леммы 2.16, позволяет утверждать, что

$$\varliminf_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du_{l_j}) D_i u_{l_j} + g_2 \right\} \chi_j(x)\, dx \geq$$

$$\geq \int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du) D_i u + g_2 \right\} \varliminf_{j\to\infty} \chi_j(x)\, dx. \tag{2.71}$$

Из (2.71) на основании (2.67) следует

$$\varliminf_{j\to\infty} \int\limits_{E_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du_{l_j}) D_i u_{l_j} + g_2 \right\} dx \geq \int\limits_{E} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du) D_i u + g_2 \right\} dx. \tag{2.72}$$

В (2.64) переходим к пределу по $j \to \infty$, используя (2.72), (2.60), (2.66), (2.59) и (2.65). В итоге получим

$$\int\limits_{\{|\,u-\varphi\,|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du) D_i u + g_2 \right\} dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{\{|\,u-\varphi\,|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du) D_i \varphi \right\} dx + \int\limits_{\Omega} f T_k(u - \varphi)\, dx + \int\limits_{\{|\,u-\varphi\,|<k\}} g_2\, dx,$$

откуда

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, Du) D_i T_k(u - \varphi) \right\} dx \leq \int\limits_{\Omega} f T_k(u - \varphi)\, dx.$$

Таким образом, неравенство (1.9) имеет место. Теорема 1.2 доказана.

Автор благодарит д. ф.-м. н. А. А. Ковалевского за постановку задачи и содержательные рекомендации.

Список литературы

[1] Benilan Ph., Boccardo L., Gallouët Th., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J.L., *An L^1– theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations*, Ann.Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci 22 (1995), 241–273.

[2] Boccardo L., Gallouët T., Marcellini P., *Anisotropic equations in L^1*, Differential and Integral Equations **9** (1996), 209–212.

[3] Boccardo L., Cirmi G. R., *Existence and uniqueness of solution of unilateral problems with L^1– data*, Journal of Convex Analysis **6** (1999), 195–206.

[4] Kovalevsky A., *Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of nonlinear elliptic fourth order equations with L^1– data*, Nonlinear Boundary Value Problems **9** (1999), 46–54.

[5] Ковалевский А.А., *Энтропийные решения задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с L^1– правыми частями*, Известия Российской АН, Сер.Матем. **65** (2001), 27–80.

[6] Kovalevsky A., *Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of nonlinear elliptic high–order equations with L^1– data*, Нелинейные граничные задачи **12** (2002), 119–127.

[7] Kovalevsky A., Nicolosi F., *Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of degenerate anisotropic fourth–order equations with L^1– right-hand sides*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications **50** (2002), 581–619.

[8] Лионс Ж.–Л., *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, М., Мир, (1972), 587 с.

[9] Troisi M., *Teoremi di inclusione per spazi di Sobolev non isotropi*, Ricerche Mat. **18** (1969), 3–24.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины
83114, Донецк 114, ул. Розы Люксембург, 74.